ARITHMÉTIQUE

1. Comment montrer que b divise a, avec a $\in \mathbb{Z}$ et b $\in \mathbb{Z}$?

Méthode 1
On montre que $a = kb$, où k est un entier relatif.

Méthode 2
On montre que $a \equiv 0 (b)$.

Méthode 3
- On écrit b comme produit de nombres premiers.
- On montre que chaque facteur divise a.
- On conclut.

Méthode 4
- On montre que b divise ac, où c $\in \mathbb{Z}$.
- On montre que $PGCD(b\ ;\ c) = 1$ (b et c sont premiers entre eux).
- On conclut, grâce au théorème de Gauss, que b divise a.

2. Comment déterminer $PGCD(a\ ;\ b)$?

Méthode 1
On montre que le dernier reste de la division euclidienne de a par b vaut 0.

Méthode 2
- On trouve les diviseurs communs de a et b à partir de leur décomposition en produit de facteurs premiers.
- On déduit le PGCD.

3. Comment montrer que $PGCD(a\ ;\ b)=d$?

Méthode 1
Méthodes 1 et 2 précédentes.

Méthode 2
On montre que $PGCD(a\ ;\ b) \leqslant d$ et $PGCD(a\ ;\ b) \geqslant d$.

4. Comment déterminer $PPCM(a\,;b)$?

Méthode 1
- On décompose a et b en produit de facteurs premiers.
- On déduit leur PPCM.

Méthode 2
On applique la formule
$PGCD(a\ ;\ b)\times PPCM(a\ ;\ b)=a\times b$.

5. Comment montrer que a et b sont premiers entre eux, avec $a\in\mathbb{Z}$ et $b\in\mathbb{Z}$?

Méthode 1
On montre que $PGCD(a\ ;\ b)=1$.

Méthode 2
- On pose $PGCD(a\ ;\ b)=d$.
- On utilise le fait que d divise a et b pour montrer que d divise 1.
- On conclut que $d=1$.

6. Comment bien utiliser la congruence ?

Méthode
- Se rappeler que $a\equiv b(n)$ signifie " a et b ont le même reste par la division euclidienne par n" ou "a-b est divisible par n" ou encore " $a=b+kn$, $k\in\mathbb{Z}$."
- La congruence est "compatible" avec la somme, le produit et la puissance.

7. Comment calculer a^n modulo b ?

Méthode
- On détermine un entier k tel que $a^k\equiv 1(b)$ ou $a^k\equiv -1(b)$.
- On exprime n en fonction de k ; c'est-à-dire $n=mk+p$.
- On remplace n par $mk+p$ pour terminer le calcul.

8. Comment résoudre une équation de la forme $ax \equiv b(n)$?

Méthode
On se ramène à une équation diophantienne en remarquant que $ax \equiv b(n)$ équivaut à $ax - kn = b$, où k ∈ ℤ.

9. Comment déterminer une solution particulière d'une équation diophantienne $ax + by = c$, a, b et c étant des entiers relatifs ?

Méthode 1
À vue d'œil (pour les cas évidents).

Méthode 2
En remontant l'algorithme d'Euclide pour trouver $PGCD(a\ ;\ b)$.

10. Comment résoudre une équation diophantienne $ax + by = c$?

Méthode
- On trouve un couple de solution particulière $(x_0\ ;\ y_0)$; d'où $ax_0 + by_0 = c$.
- On soustrait l'égalité précédente à l'équation $ax + by = c$ pour obtenir $a(x - x_0) = -b(y - y_0)$.
- On applique le théorème de Gauss pour trouver toutes les solutions.
- Réciproquement, on vérifie que les nombres trouvés sont bien solutions de l'équation.

SIMILITUDES

1. Comment montrer qu'une transformation T est une similitude ?

Méthode 1
On montre que T multiplie les distances par k, où k $\in \mathbb{R}^{*+}$.
Pour cela, on peut prendre deux points A et B du plan, d'images A' et B' par T, et montrer que $A'B' = kAB$.

Méthode 2
On montre que dans un repère orthonormé direct, T a pour écriture complexe $z' = az + b$ ou $z' = a\overline{z} + b$.

Méthode 3
On montre que T est la composée d'autres similitudes.

2. Comment montrer qu'une similitude est directe ?

Méthode 1
On montre que son écriture complexe dans un repère orthonormé est $z' = az + b$.

Méthode 2
On montre qu'elle conserve les angles orientés.

3. Comment déterminer le rapport d'une similitude plane ?

Méthode 1
Si l'on connaît son écriture complexe $z' = az + b$, alors son rapport vaut $|a|$.

Méthode 2
Le rapport k vaut $\dfrac{AB}{A'B'}$, où A et B sont des points du plan et A' et B', leurs images respectives.

4. Comment déterminer l'angle d'une similitude plane ?

Méthode 1
Si l'on connaît son écriture complexe $z' = az + b$, alors son angle vaut $arg(a)$.

Méthode 2
L'angle vaut $(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{A'B'})$ où A et B sont des points du plan et A' et B', leurs images respectives.

5. Comment montrer qu'une similitude est une réflexion ?

Méthode
On montre que c'est une similitude indirecte de rapport 1 dont les points invariants forment une droite.

6. Comment déterminer les points invariants d'une similitude directe S ?

Méthode
On résout l'équation $z = az + b$, où z est l'affixe d'un point M du plan complexe.