Mais comment on fait pour ...

Toutes les méthodes fondamentales en Maths Term.S

Table des matières

" Les chercheurs se sont rendus compte que l'intelligence humaine dépend essentiellement des connaissances. L'intelligence crée des connaissances, les utilise, en génère de nouvelles... "

Patrick Brézillon

Chapitre 1 - GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

1. Comment déterminer l'ensemble de définition d'une fonction ?

Méthode 1
Si l'expression de la fonction contient des quotients, on écrit qu'elle est définie si, et seulement si, le ou les dénominateurs sont différents de 0. La résolution du ou des équations ainsi obtenues conduit à D_f.

Exemple
Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction
f : $x \longmapsto \frac{3x}{7-5x} + \frac{4}{x-6}$.

Solution
Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(x)$ est définie si, et seulement si, $7-5x \neq 0$ et $x-6 \neq 0$; soit $x \neq \frac{7}{5}$ et $x \neq 6$.

On a donc $D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{7}{5}\ ;\ 6\right\}$.

Remarque : l'ensemble de définition est aussi appelé domaine de définition.

Méthode 2
Si l'expression de la fonction contient des racines carrées, on écrit qu'elle est définie si, et seulement si, la ou les expressions sous les racines sont positives ou nulles. La résolution du ou des inéquations ainsi obtenues donne D_f.

Exemple
Déterminer l'ensemble de définition D_g de la fonction
g : $x \longmapsto \sqrt{8-3x} + \sqrt{4+5x}$.

Solution
Soit $x \in \mathbb{R}$. $g(x)$ est définie si, et seulement si, $8-3x \geqslant 0$ **et** $4+5x \geqslant 0$; soit $x \leqslant \frac{8}{3}$ et $x \geqslant -\frac{4}{5}$. On a donc $D_f = \left[-\frac{4}{5}; \frac{8}{3}\right]$.

Méthode 3
Si l'expression de la fonction contient des $\ln$ (logarithmes), on écrit qu'elle est définie si, et seulement si, les quantités auxquelles s'applique ln sont strictement positives. La résolution du ou des inéquations ainsi obtenues donne D_f.

Exemple 1
Quel est l'ensemble de définition D_h de la fonction $h : x \longmapsto \ln(1-x)$?

Solution
La fonction h est définie si, et seulement si, $1-x>0$; soit $x<1$.
Ainsi, $D_h =]-\infty;1[$.

Exemple 2
Étudier le domaine de définition D_f de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{\ln(x+2)}{\sqrt{9x-1}}$.

Solution
f est définie si, et seulement si, $x+2>0$, $9x-1\geqslant 0$ et 9x-1≠0 ; c'est-à-dire, x > -2, $x\geqslant\dfrac{1}{9}$ et $x\neq\dfrac{1}{9}$.

On conclut que $D_f = \left]\dfrac{1}{9};+\infty\right[$.

2. Comment montrer qu'une fonction f est paire ?

Méthode
- On écrit que pour tout $x\in D_f$, $-x\in D_f$.
- On montre que $f(-x)=f(x)$ en calculant $f(-x)$.
- On conclut alors que f est paire.

Exemple
Soit $f(x)=3-\dfrac{1}{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}^*$. Montrer que f est paire.

Solution
Pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, on a $(-x)\in\mathbb{R}^*$.

D'autre part, $f(-x) = 3-\dfrac{1}{(-x)^2} = 3-\dfrac{1}{x^2} = f(x)$.

La fonction f est donc paire.

3. Comment montrer qu'une fonction f est impaire ?

Méthode

- On écrit que tout $x \in D_f$, $-x \in D_f$ (c'est vrai pour la quasi-totalité des exercices proposés).
- On montre que $f(-x) = -f(x)$ en calculant $f(-x)$.
- On conclut alors que f est impaire.

Exemple

Montrer que la fonction g définie par $g(x) = 2x^3 - xe^{x^2}$ est impaire sur $\mathbb{R}$.

Solution

Pour tout x∈ $\mathbb{R}$, on a (-x)∈$\mathbb{R}$.

D'autre part,

$g(-x) = 2(-x)^3 - (-x)e^{(-x)^2} = -2x^3 + x\,e^{x^2} = -(2x^3 - xe^{x^2}) = -g(x)$.

La fonction g est donc impaire.

4. Comment étudier la parité d'une fonction f ?

Méthode

- On vérifie que pour tout $x \in Df$, $-x \in D_f$.
- On calcule $f(-x)$.
- Si $f(-x) = f(x)$, on conclut que f est paire.
- Si $f(-x) = -f(x)$, on conclut que f est impaire.
- Si $f(-x)$ est différente des deux résultats précédents, alors f n'est ni paire ni impaire.

Exemple

Soit $h(x) = \ln\left(\dfrac{x+5}{5-x}\right)$. Étudier la parité de h sur I=]-5;5[.

Solution

Pour tout x∈ I, (-x)∈ I (car $-5 < x < 5 \Leftrightarrow -5 < (-x) < 5$).

Calculons $f(-x)$:

$$f(-x) = \ln\frac{-x+5}{5-(-x)} = \ln\frac{5-x}{x+5} = \ln\left(\frac{1}{\frac{x+5}{5-x}}\right) = -\ln\frac{x+5}{5-x} = -f(x).$$

On peut conclure que f est impaire.

5. Comment montrer qu'une fonction f est périodique de période p ?

Méthode

- On écrit que pour tout $x \in D_f$, on a $(x+p) \in D_f$.
- On montre que $f(x+p) = f(x)$ en calculant $f(x+p)$.
- On conclut que la fonction f est périodique de période p.

Exemple

Soit $f(x) = -5\cos^2(x) + 1 + \sin x$ définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est périodique de période 2π.

Solution

Pour tout x∈$\mathbb{R}$, $(x+2\pi) \in \mathbb{R}$.

D'autre part :

$$\begin{aligned} f(x+2\pi) &= -5\cos^2(x+2\pi) + 1 + \sin(x+2\pi) \\ &= -5\cos^2(x) + 1 + \sin x \text{, (car } \sin(x+2\pi)=\sin x \text{ et } \cos(x+2\pi) = \cos x) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

La fonction f est donc périodique de période 2π.

6. Comment interpréter graphiquement la parité d'une fonction f ?

Méthode 1

Si la fonction f est paire, alors l'axe des ordonnées est un axe de symétrie de la courbe représentative de f. On peut donc restreindre l'étude de f à la partie positive (ou négative) de son domaine de définition.

Ainsi, si f est paire sur $\mathbb{R}$, on étudie f sur l'intervalle $[0;+\infty[$. C_f, la courbe complète de f, s'obtient par la symétrie d'axe (Oy).

Méthode 2
Si la fonction f est impaire, alors l'origine du repère O est centre de symétrie de la courbe représentative de f.
On peut donc restreindre l'étude de f à la partie positive (ou négative) de son domaine de définition.

7. Comment interpréter graphiquement la périodicité d'une fonction f ?

Méthode
Si la fonction f est périodique de période p, les portions de C_f sont les mêmes sur des intervalles successifs de longueurs p.
Ou encore, la courbe de f est invariante par la translation de vecteur $p\vec{i}$.
On peut donc restreindre l'étude de la fonction f à un intervalle de longueur p.

Exemple

Soit $f(x)=-5\cos^2\left(\frac{x}{5}\right)-1$, $x\in\mathbb{R}$.

a) Étudier la parité de la fonction f .
b) Montrer que f est 10π -périodique.
c) En déduire qu'il suffit d'étudier f sur l'intervalle $[0;5\pi]$.

Solution
a) Pour $x\in\mathbb{R}$, on a $-x\in\mathbb{R}$ et :

$$f(-x)=-5\cos^2\left(\frac{-x}{5}\right)-1 \;=-5\left(\cos\left(\frac{-x}{5}\right)\right)^2-1 \;=-5\left(\cos\left(\frac{x}{5}\right)\right)^2-1 \cdot$$

D'où $f(-x)=f(x)$ sur $\mathbb{R}$.
La fonction f est donc paire.

b) Pour $x\in\mathbb{R}$, on a $(x+10\pi)\in\mathbb{R}$ et :

$$f(x+10\pi)=-5\cos^2\left(\frac{x+10\pi}{5}\right)-1=-5\left(\cos\left(\frac{x+10\pi}{5}\right)\right)^2-1$$

$$=-5\left(\cos\left(\frac{x}{5}+2\pi\right)\right)^2-1=-5\left(\cos\left(\frac{x}{5}\right)\right)^2-1=f(x) .$$

La fonction f est donc 10π -périodique.

c) La parité de la fonction f permet de restreindre son étude à l'intervalle $[0;+\infty[$ alors que sa 10π -périodicité autorise à ne l'étudier que sur un

intervalle de longueur 10π ; choisissons $[-5\pi;5\pi]$.
La prise en compte simultanée de la parité et la périodicité conduit finalement à étudier f sur l'intervalle $[0;5\pi]$.

8. Comment montrer qu'un point A(a;b) est centre de symétrie de la courbe représentative d'une fonction f ?

Méthode 1

- On considère un réel h tel que $(a+h)\in D_f$ et $(a-h)\in D_f$.
- On montre que $\dfrac{f(a+h)+f(a-h)}{2}=b$ en calculant $\dfrac{f(a+h)+f(a-h)}{2}$.
- On conclut.

Exemple

Soit $f(x)=-x^3+x^2$ définie sur $\mathbb{R}$. Démontrer que le point A(1;2) est centre de symétrie de C_f, la courbe représentative de f.

Solution

Soit $h\in\mathbb{R}$ tel que $(1+h)$ et $(1-h)$ appartiennent à D_f.

Calculons $\dfrac{f(1+h)+f(1-h)}{2}$:

$$\frac{f(1+h)+f(1-h)}{2} = \frac{-(1+h)^3+(1+h)^2-(1-h)^3(1-h)^2}{2}.$$

Après développement, on trouve $\dfrac{f(1+h)+f(1-h)}{2}=2$ qui est l'ordonnée de A.

On peut donc conclure que $A(1;2)$ est centre de symétrie de C_f.

Méthode 2 **(plus rapide)**

- On considère un réel x tel que $(2a-x)\in D_f$
- On montre que $\dfrac{f(x)+f(2a-x)}{2}=b$ (on a posé $(a+h)=x$ dans la méthode 1).
- On conclut.

Exemple

Soit $f(x) = -x^3 + x^2$ définie sur ℝ. Démontrer que le point A(1;2) est centre de symétrie de C_f.

Solution

Soit x∈ℝ tel que (2+x)∈ℝ.

Calculons $\dfrac{f(x)+f(2a-x)}{2}$:

$$\frac{f(x)+f(2a-x)}{2} = -x^3+3x^2-(2-x)^3+3(2-x)^2 .$$

Après développement, on trouve $\dfrac{f(x)+f(2a-x)}{2}$ = 2 qui est l'ordonnée de A.

On conclut donc que A(1;2) est centre de symétrie de C_f.

9. Comment montrer qu'une droite d'équation x=a est axe de symétrie de la courbe représentative d'une fonction f ?

Méthode 1

- On prend h∈ℝ tel que $(a+h)$ et $(a-h) \in D_f$.
- On montre que $f(a+h)=f(a-h)$ en calculant séparément $f(a+h)$ et $f(a-h)$.
- On conclut.

Exemple

Soit $g(x)=\dfrac{3x^2-12x+1}{x^2-4x}$ définie sur ℝ-{0;4}. Montrer que la droite d'équation $x=2$ est axe de symétrie de C_{g}.

Solution

Soit $h \geqslant 0$ tel que $(2+h)$ et $(2-h)$ appartiennent à D_f (ici, a= 2).

Montrons que $g(2+h)=g(2-h)$.

$$g(2+h)=\frac{3(2+h)^2-12(2+h)+1}{(2+h)^2-4(2+h)} = \frac{3h^2-11}{h^2-4} \quad ;$$

$$g(2-h)=\frac{3(2-h)^2-12(2-h)+1}{(2-h)^2-4(2-h)} = \frac{3h^2-11}{h^2-4} .$$

On constate que $g(2+h)=g(2-h)$.

La droite d'équation $x=2$ est donc axe de symétrie de C_g.

Méthode 2

On montre que $f(2a-x)=f(x)$ (on a posé $a+h=x$ dans l'équation précédente).

Exemple

Soit $g(x)=\dfrac{3x^2-12x+1}{x^2-4x}$ définie sur $\mathbb{R}$-{0;4}.

Montrer que la droite d'équation $x=2$ est axe de symétrie de $C_{g.}$.

Solution

Soit $x\in D_f$ tel que $(4+x)$ appartient à D_f.

Montrons que $g(2a-x)=g(x)$ avec $a=2$.

On a $g(2a-x)=g(4-x)$

$$=\frac{3(4-x)^2-12(4-x)+1}{(4-x)^2-4(4-x)}=\ldots=\frac{3x^2-12x+1}{x^2-4x}=g(x).$$

On peut conclure que la droite d'équation $x=2$ est axe de symétrie de C_g.

10. Comment interpréter l'égalité f(x)+f(-x)=c ?

Méthode

Il suffit de voir que $f(x)+f(-x)=c$ s'écrit aussi $\dfrac{f(0+x)+f(0-x)}{2}=\dfrac{c}{2}$. Ce qui signifie que le point $A\left(0;\dfrac{c}{2}\right)$ est centre de symétrie de C_f.

11. Comment déterminer les coordonnées du ou des points d'intersection de C_f et C_g ?

Méthode

- On résout l'équation $f(x)=g(x)$ pour trouver la ou les abscisses x_0 des points d'intersection.
- On calcule $f(x_0)$ pour trouver la ou les ordonnées.
- On conclut que les points de coordonnées $(x_0;f(x_0))$ sont les points cherchés.

12. Comment déterminer les coordonnées du ou des points d'intersection de C_f et de l'axe des abscisses ?

Méthode

- Le ou les points d'intersection ont pour ordonnée 0.
- On résout l'équation $f(x)=0$ pour trouver la ou les abscisses x_0 (solution de l'équation) des points d'intersection.
- Les points de coordonnées $(x_0\ ;\ 0)$ sont les points cherchés.

Exemple

Soit la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = -6x^2 + x + 5$.
Déterminer le ou les points d'intersection de C_f, la courbe représentative de f, et de l'axe des abscisses.

Solution

Résolvons l'équation $f(x) = 0$ pour déterminer les abscisses des points d'intersection :
On a $f(x) = 0 \Leftrightarrow -6x^2 + x + 5 = 0$.
Après calcul du discriminant de cette équation du second degré, on obtient les deux solutions $x_1 = 1$ et $x_2 = -\dfrac{5}{6}$.
Les points cherchés ont donc pour coordonnées $(1\ ;\ 0)$ et $\left(-\dfrac{5}{6}\ ;\ 0\right)$.

13. Comment déterminer les coordonnées du point d'intersection de C_f et de l'axe des ordonnées ?

Méthode

- Le point d'intersection a pour abscisse 0 et pour ordonnée $f(0)$.
- On calcule f(0).
- Le point cherché a pour coordonnées $(0\ ;\ f(0))$.

Exemple

Soit la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = -6x^2 + x + 5$.
Déterminer le point d'intersection de C_f, la courbe représentative de f, et de l'axe des ordonnées.

Solution

Le point cherché a pour abscisse 0 et pour ordonnée $f(0)$.
Comme $f(0) = 5$, on en déduit que le point d'intersection de C_f et de l'axe des ordonnées est le point de coordonnées $(0\ ;\ 5)$.