

Mais comment on fait pour ...

*Toutes les méthodes fondamentales en Maths Term.S*

## Table des matières

1) GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS .....	13
1. Comment déterminer l'ensemble de définition d'une fonction ?.....	13
2. Comment montrer qu'une fonction $f$ est paire ?.....	14
3. Comment montrer qu'une fonction $f$ est impaire ?.....	15
4. Comment étudier la parité d'une fonction $f$ ?.....	15
5. Comment montrer qu'une fonction $f$ est périodique de période $p$ ?.....	16
6. Comment interpréter graphiquement la parité d'une fonction $f$ ?.....	16
7. Comment interpréter graphiquement la périodicité d'une fonction $f$ ?.....	17
8. Comment montrer qu'un point $A(a;b)$ est centre de symétrie de la courbe représentative d'une fonction $f$ ?.....	18
9. Comment montrer qu'une droite d'équation $x=a$ est axe de symétrie de la courbe représentative d'une fonction $f$ ? .....	19
10. Comment interpréter l'égalité $f(x)+f(-x)=c$ ?.....	20
11. Comment déterminer les coordonnées du ou des points d'intersection de $C_f$ et $C_g$ ?.....	20
12. Comment déterminer les coordonnées du ou des points d'intersection de $C_f$ et de l'axe des abscisses ?.....	21
13. Comment déterminer les coordonnées du point d'intersection de $C_f$ et de l'axe des ordonnées ?.....	21
2) LIMITES ET ASYMPTOTES.....	23
1. Comment retenir les limites des fonctions de référence ?.....	23
2. Comment lire graphiquement $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ?.....	23
3. Comment calculer une limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ?.....	24
4. Comment interpréter graphiquement une limite ? .....	34
5. Comment montrer que la courbe représentative d'une fonction $f$ admet une asymptote verticale ? .....	35
6. Comment montrer que la courbe représentative d'une fonction $f$ admet une asymptote horizontale ?.....	36
7. Comment montrer que la courbe représentative d'une fonction $f$ admet une asymptote oblique ?.....	36
8. Comment étudier la position relative de $C_f$ et d'une droite $(D)$ qui lui est asymptote ? ..	37
3) CONTINUITÉ.....	39
1. Comment montrer qu'une fonction $f$ est continue ou non en $a \in \mathbb{R}$ ?.....	39
2. Comment montrer qu'une fonction est continue sur un intervalle ?.....	40
3. Comment montrer que l'équation $f(x)=k$ admet <b>au moins</b> une solution sur un intervalle $[a;b]$ ?.....	41
4. Comment montrer que l'équation $f(x)=k$ admet une <b>unique</b> solution $\alpha$ sur un intervalle $[a;b]$ ?.....	42
5. Comment déterminer une valeur approchée ou un encadrement de la solution $\alpha$ ? .....	43
6. Comment déduire le signe d'une fonction $g$ sur un intervalle $I$ après avoir montré que l'équation $g(x)=0$ y admettait une unique solution $\alpha$ ?.....	43
7. Comment montrer que $g(x) \leq 0$ ou $g(x) \geq 0$ sur $I=[\alpha; +\infty[$ , où $\alpha$ est l'unique solution de l'équation $g(x)=0$ sur un intervalle $J$ contenant $I$ ?.....	46
4) DÉRIVATION.....	47
1. Comment montrer qu'une fonction $f$ est dérivable en $a \in \mathbb{R}$ ?.....	47
2. Comment étudier la dérivabilité d'une fonction $f$ en $a \in \mathbb{R}$ ? .....	48
3. Comment étudier la dérivabilité d'une fonction $f$ sur un intervalle $I$ donné ? .....	49

4. Comment interpréter graphiquement le résultat suivant : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \infty$ ou quelle conséquence graphique ce résultat a-t-il pour $C_f$ ?	50
5. Comment interpréter graphiquement les résultats suivants : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \alpha$ réel et $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \beta$ réel, avec $\alpha \neq \beta$ ou quelle conséquence graphique ces résultats ont-ils pour $C_f$ ?	50
6. Comment calculer $f'(a)$ ?	50
7. Comment interpréter graphiquement $f'(a)$ ?	51
8. Comment déterminer graphiquement $f'(a)$ ?	51
9. Comment justifier que $f$ est dérivable sur un intervalle $I$ avant de calculer $f'(x)$ ?	52
10. Comment calculer $f'(x)$ ?	52
11. Comment calculer une dérivée seconde ?	56
12. Comment étudier le signe d'une dérivée ou, plus généralement, comment étudier le signe d'une fonction ?	56
13. Comment déterminer le sens de variation d'une fonction $f$ sur un intervalle $I$ ?	64
14. Comment montrer qu'une fonction $f$ est encadrée par deux autres sur un intervalle $I$ donné (c'est-à-dire $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ sur $I$ ) ?	67
15. Comment montrer qu'une fonction $f$ est constante sur un intervalle $I$ ?	68
16. Comment déterminer une équation de la tangente à $C_f$ au point d'abscisse $a$ ?	68
17. Comment montrer qu'il existe une ou des tangentes à $C_f$ passant par un point $A(x_A; y_A)$ du plan ?	69
18. Comment montrer qu'il existe une ou des droites tangentes à $C_f$ parallèles à une droite $(D)$ donnée d'équation $y=mx+p$ ?	70
19. Comment étudier la position de $C_f$ par rapport à une tangente $T$ d'équation $y=mx+p$ ?	71
20. Comment calculer la dérivée d'une fonction définie à l'aide de la valeur absolue ?	72
<b>5) FONCTIONS EXPONENTIELLES</b>	73
1. Comment faire des calculs avec les exponentielles ?	73
2. Comment résoudre une équation exponentielle ?	73
3. Comment résoudre une inéquation exponentielle ?	75
4. Comment montrer une égalité de quotients contenant des exponentielles ?	76
5. Comment calculer des dérivées de fonctions contenant des exponentielles ?	76
6. Comment étudier le signe de fonctions dérivées contenant des exponentielles ?	77
7. Comment calculer les limites de fonction contenant des exponentielles ?	79
8. Comment étudier la fonction exponentielle de base $a$ : $a^x$ ?	81
<b>6) ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES</b>	83
1. Comment montrer qu'une fonction donnée $f$ est solution d'une équation différentielle ?	83
2. Comment déterminer un ou des réels pour qu'une fonction soit solution d'une équation différentielle ?	84
3. Comment résoudre une équation différentielle ?	85
4. Comment déterminer LA solution d'une équation différentielle qui vérifie une condition donnée ?	86
5. Comment traiter les questions du type "Démontrer que ... est solution de (E) si, et seulement si, ... est solution de (G)" ? Et comment déduire ensuite les solutions de l'équation (E) ?	86
<b>7) FONCTIONS LOGARITHMES</b>	89
1. Comment faire des calculs avec les logarithmes ?	89
2. Comment résoudre des équations logarithmiques ?	90
3. Comment résoudre des inéquations logarithmiques ?	92
4. Comment calculer des limites de fonctions contenant $\ln$ ?	94

5.Comment calculer les dérivées de fonctions contenant $\ln$ ? .....	97
6.Comment étudier le signe de $\ln(X)$ ? .....	98
7.Comment calculer avec $\log_a(x)$ ?.....	100
<b>8) PRIMITIVES.....</b>	<b>101</b>
1.Comment montrer qu'une fonction $f$ est une primitive d'une autre fonction $g$ sur un intervalle $I$ ?.....	101
2.Comment montrer qu'une fonction $f$ admet une primitive sur $I$ ?.....	102
3.Comment déterminer une primitive d'une fonction $f$ ?.....	102
4.Comment déterminer LES primitives d'une fonction $f$ ?.....	110
5.Comment déterminer LA primitive d'une fonction $f$ , vérifiant une condition donnée ? 111	
6.Comment calculer la dérivée de la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ , définie sur un intervalle $I$ tel que $a \in I$ ?.....	113
<b>9) INTÉGRATION.....</b>	<b>115</b>
1.Comment calculer l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ ?.....	115
2.Comment calculer $\int_a^b f(x)dx$ à l'aide d'une intégration par partie ? .....	119
3.Comment étudier le signe de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ ? .....	123
4.Comment déterminer un encadrement de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ ? .....	124
5.Comment traiter les exercices où interviennent intégrales et suites ?.....	127
6.Comment calculer la valeur moyenne d'une fonction $f$ sur un intervalle $[a;b]$ ?.....	130
7.Comment calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine du plan délimité par $C_f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=\alpha$ et $x=\beta$ ? .....	131
8.Comment interpréter graphiquement l' intégrale $\int_a^b f(x)dx$ ? .....	133
9.Comment interpréter graphiquement l'intégrale $\int_a^b (f(x)-g(x))dx$ ?.....	133
10.Comment donner la valeur d'une aire en $cm^2$ , $m^2$ ... ?.....	133
11.Comment calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la surface entre deux courbes, délimitée par les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ ? .....	134
12.Comment calculer le volume engendré par la rotation de la portion de $C_f$ sur l'intervalle $[a;b]$ autour de l'axe des abscisses ? .....	135
13.Comment, dans un repère orthonormé de l'espace, calculer le volume $V$ du solide $S$ engendré par $S(z)$ où $z \in [a;b]$ et $S(z)$ l'intersection de $S$ et du plan d'équation $z=t$ ? ..	137
<b>10) SUITES ARITHMÉTIQUES ET GÉOMÉTRIQUES.....</b>	<b>139</b>
1.Comment montrer qu'une suite $(u_n)$ est arithmétique ?.....	139
2.Comment montrer qu'une suite $(u_n)$ est géométrique ?.....	140
3.Comment exprimer $u_n$ en fonction de $n$ ou, plus généralement, comment exprimer un terme d'une suite en fonction d'un autre ?.....	142
4.Comment compter le nombre de termes dans une somme de termes consécutifs d'une suite ?.....	144
5.Comment calculer une somme de termes d'une suite arithmétique ?.....	144
6.Comment calculer une somme de termes d'une suite géométrique ?.....	145
7.Comment traiter les exercices sur les pourcentages successifs (capital, intérêt composé, évolution de population...) ?.....	145

11) GÉNÉRALITÉS SUR LES SUITES.....	147
1.Comment démontrer par récurrence qu'une proposition est vraie ?.....	147
2.Comment déterminer le sens de variation d'une suite ? .....	149
3.Comment calculer la limite d'une suite ?.....	155
4.Comment montrer qu'une suite est majorée, minorée ou bornée ?.....	159
5.Comment montrer qu'une suite $(u_n)$ converge ou comment étudier la convergence d'une suite ?.....	162
6.Comment représenter les termes d'une suite de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ sur l'axe des abscisses ?.....	164
7.Comment montrer que deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes ?.....	165
8.Comment montrer qu'une suite $(u_n)$ est constante ? .....	166
9.Comment déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ lorsque $(u_n)$ est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ ?.....	168
10. Comment comprendre et utiliser la notation $\sum_{k=0}^n f(k)$ ? .....	168
12) LES NOMBRES COMPLEXES.....	171
1.Comment placer dans un repère un point dont on connaît l'affixe ?.....	171
2.Comment faire des calculs avec les nombres complexes ?.....	171
3.Comment résoudre une équation complexe contenant un ou deux quotients ?.....	172
4.Comment résoudre une équation complexe contenant $z$ et $\bar{z}$ ? .....	172
5.Comment résoudre une équation complexe du second degré à coefficients réels ?.....	173
6.Comment mettre un nombre complexe donné comme quotient sous forme algébrique ? .....	174
7.Comment déterminer graphiquement le module d'un nombre complexe $z_M$ ?.....	174
8.Comment lire graphiquement un argument d'un nombre complexe $z_M$ ?.....	175
9.Comment calculer le module d'un complexe donné sous la forme $z=a+ib$ ?.....	176
10.Comment calculer un argument d'un complexe donné sous la forme $z=a+ib$ ?.....	176
11.Comment calculer le module d'un complexe donné sous la forme $z = R e^{i\theta}$ ?.....	178
12.Comment calculer un argument d'un complexe donné sous la forme $z = R e^{i\theta}$ , avec $R \in \mathbb{C}$ ?.....	179
13.Comment passer de la forme algébrique d'un complexe ( $z = a + ib$ ) à sa forme trigonométrique (ou exponentielle) ?.....	179
14.Comment passer de la forme trigonométrique $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ (ou exponentielle $z = r e^{i\theta}$ ) à la forme algébrique $z = a + ib$ ?.....	180
15.Comment déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que $ z - z'  = k$ ou plus généralement $ \dots  =  \dots $ ?.....	181
16.Comment déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que $\arg(z - z_A) = \theta$ ? .....	182
17.Comment calculer l'affixe de l'image $M'(z')$ d'un point $M(z)$ par la translation de vecteur $\vec{u}(b)$ ?.....	183
18.Comment calculer l'affixe de l'image $M'(z')$ d'un point $M(z)$ par l'homothétie de centre $C(c)$ et de rapport $k$ ?.....	183
19.Comment calculer l'affixe de l'image d'un point par la rotation de centre $C(c)$ et d'angle $\theta$ ? .....	183
20.Comment montrer qu'une transformation donnée est une homothétie ? .....	184
21.Comment montrer qu'une transformation donnée est une rotation ? .....	185
22.Comment déterminer la mesure d'un angle orienté $(\vec{AM}; \vec{BN})$ ? .....	185
23.Comment calculer la distance $AB$ ?.....	185
24.Comment calculer l'affixe $z_{\vec{MN}}$ d'un vecteur $\vec{MN}$ ?.....	186
25.Comment calculer l'affixe $z_I$ du milieu $I$ d'un segment $[AB]$ ?.....	186
26.Comment calculer l'affixe $z_G$ du barycentre $G$ de 3 points $(M,m)$ , $(N,n)$ et $(P,p)$ ?..	187
27.Comment montrer qu'un point $M(z)$ appartient à un cercle $\mathcal{C}$ de centre $A(z_A)$ et de rayon $r$ ?.....	187
28.Comment déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels qu'un complexe $Z$ donné en fonction de $z$ soit un réel ? .....	188

29. Comment déterminer l'ensemble des points M tels qu'un complexe Z donné en fonction de z soit un imaginaire pur ?.....	189
30. Comment interpréter géométriquement $\left  \frac{z_A - z_B}{z_C - z_D} \right  ? \left  \frac{z_A - z_B}{z_C - z_D} \right  = 1 ? \left  \frac{z_A - z_B}{z_C - z_D} \right  = k ? \dots$	191
31. Comment interpréter géométriquement $\arg \left( \frac{z_A - z_B}{z_C - z_D} \right) ? \arg \left( \frac{z_A - z_B}{z_C - z_D} \right) = 0 [2\pi] ?$	
$\arg \left( \frac{z_A - z_B}{z_C - z_D} \right) = \frac{\pi}{2} [2\pi] ? \dots$	192
32. Comment déterminer le ou les points invariants d'une application f donnée ?.....	192
33. Comment calculer l'image d'un point A d'affixe ( $z_A$ ) par une application f ?.....	193
34. Comment montrer que 3 points A, B et C sont alignés ?.....	193
35. Comment montrer qu'un triangle EFG est isocèle en F ?.....	194
36. Comment montrer qu'un triangle MNP est équilatéral ?.....	194
37. Comment montrer qu'un triangle IJK est rectangle en J ?.....	195
38. Comment montrer que deux vecteurs $\vec{u}(z)$ et $\vec{v}(z')$ sont colinéaires ?.....	195
39. Comment montrer que deux vecteurs $\vec{u}(z)$ et $\vec{v}(z')$ sont orthogonaux ?.....	195
40. Comment montrer qu'un quadrilatère DEFG est un parallélogramme ? .....	196
41. Comment montrer qu'un quadrilatère DEFG est un losange ?.....	196
42. Comment montrer qu'un quadrilatère DEFG est un carré ?.....	196
43. Comment déterminer l'image d'un cercle $\mathcal{C}(\Omega; r)$ par une application donnée ?.....	196
<b>13) PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE.....</b>	<b>197</b>
1. Comment calculer le produit scalaire de deux vecteurs ?.....	197
2. Comment montrer que deux vecteurs sont orthogonaux ? .....	200
3. Comment déterminer une équation cartésienne d'un plan $\mathcal{P}$ ?.....	203
4. Comment montrer qu'un point $A(x_A; y_A; z_A)$ appartient à un plan $\mathcal{P}$ d'équation $ax+by+cz+d=0$ ?.....	204
5. Comment obtenir un point d'un plan $\mathcal{P}$ d'équation connue ?.....	205
6. Comment déterminer un vecteur normal à un plan $\mathcal{P}$ d'équation $ax+by+cz+d=0$ ?.....	205
7. Comment vérifier si trois points A, B et C définissent un plan ?.....	206
8. Comment déterminer un vecteur normal au plan (ABC) défini par les points A, B et C ? .....	207
9. Comment calculer la distance AB dans un repère orthonormal ?.....	208
10. Comment calculer la distance entre un point A et un plan $\mathcal{P}$ dans un repère orthonormal ? .....	208
11. Comment déterminer une équation d'une sphère $\mathcal{S}$ de centre $\Omega(\alpha; \beta; \gamma)$ et de rayon r ?.....	209
12. Comment déterminer une équation d'une sphère de diamètre [AB], les coordonnées des points A et B étant connues ?.....	210
13. Comment montrer qu'un vecteur $\vec{u}$ est normal à un plan $\mathcal{P}$ ?.....	211
14. Comment montrer que 4 points A, B, C, D sont coplanaires ? .....	211
15. Comment montrer qu'un point D appartient à un plan $\mathcal{P}$ ? .....	212
16. Comment montrer que deux plans sont parallèles ?.....	212
17. Comment montrer que deux plans sont perpendiculaires ?.....	213
18. Comment déterminer l'intersection de deux plans dont on connaît des équations ? ...	213
19. Comment déterminer l'intersection de 3 plans dont on connaît des équations ? .....	215
20. Comment déterminer l'intersection d'un plan $\mathcal{P}$ et d'une sphère $\mathcal{S}$ ou comment vérifier si un plan $\mathcal{P}$ et une sphère $\mathcal{S}$ de centre C et de rayon r sont sécants ?.....	219
21. Comment lire les coordonnées d'un point dans l'espace ? .....	219
22. Comment montrer qu'un point A appartient au plan médiateur d'un segment [B;C] ?	220
23. Comment faire la différence entre "orthogonal" et "perpendiculaire" ?.....	220
24. Comment déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\  \dots \  = \dots$ ou $\  \dots \  = \  \dots \ $ ? .....	221
25. Comment montrer qu'un point M est barycentre des points N, P et Q ?.....	223

26.Comment calculer les coordonnées d'un barycentre G de (A;a), (B;b) et (C;c) ?.....	223
14) DROITES ET PLANS DE L'ESPACE.....	225
1.Comment déterminer une représentation paramétrique d'une droite dans l'espace ? ..	225
2.Comment déterminer un vecteur directeur d'une droite de représentation paramétrique connue ? .....	227
3.Comment trouver un point d'une droite dont on connaît une représentation paramétrique ? .....	228
4.Comment déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan à partir de leurs équations ?.....	228
5.Comment montrer qu'une droite est parallèle à un plan ? .....	230
6.Comment montrer qu'une droite d est perpendiculaire à un plan ? .....	230
7.Comment déterminer l'intersection de deux droites ?.....	231
8.Comment montrer qu'un point A appartient à une droite d dont on connaît une représentation paramétrique ?.....	233
9.Comment montrer que deux droites sont parallèles dans l'espace ?.....	234
10.Comment montrer que deux droites sont orthogonales dans l'espace ? .....	234
15) DÉNOMBREMENT .....	235
1.Comment calculer des probabilités quand tous les événements élémentaires ont la même probabilité (événements élémentaires équiprobables) ?.....	235
2.Comment calculer le nombre d'anagrammes que l'on peut former avec un mot donné ? .....	235
3.Comment calculer le nombre de numéros de téléphones (ou de codes...) à p chiffres que l'on peut former avec n chiffres ? (Répétition + ordre).....	236
4.Comment calculer le nombre de choix possibles en prenant p éléments distincts parmi n et en tenant compte de l'ordre ? (Pas de répétition + ordre).....	237
5.Comment calculer le nombre de choix possibles en prenant p éléments distincts parmi n et en ne tenant pas compte de l'ordre ? (Pas de répétition + pas d'ordre).....	237
6.Comment calculer le nombre de possibilités dans le cas où l'on a plusieurs combinaisons reliées entre elles (mélange de boules rouges, noirs, blanches... Les mains d'un jeu de cartes...) ? .....	238
7.Comment faire des calculs en présence de factorielles ?.....	240
8.Comment calculer $(a + b)^n$ et $(a - b)^n$ ?.....	240
9.Comment déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire X ?.....	242
10.Comment calculer l'espérance E(X) d'une variable aléatoire X ?.....	242
11.Comment calculer la variance V(X) et l'écart type $\sigma$ d'une variable aléatoire X ?.....	243
16) PROBABILITÉ CONDITIONNELLE .....	245
1.Comment déterminer $p_A(B)$ ?.....	245
2.Comment déterminer $p(A \cap B)$ ?.....	246
3.Comment déterminer $p(A)$ ?.....	248
4.Comment savoir s'il faut utiliser un arbre ?.....	251
5.Comment savoir s'il faut utiliser un tableau ?.....	251
6.Comment montrer que deux événements A et B sont indépendants ? .....	252
7.Comment utiliser l'indépendance de deux événements ?.....	252
17) LOIS DE PROBABILITÉ .....	253
A) LOI BINOMIALE.....	253
1.Comment montrer qu'une variable aléatoire X suit une loi binomiale ? .....	253
2.Comment "sentir" l'utilisation d'une loi binomiale ?.....	253
3.Comment calculer $p(X=k)$ lorsque X suit une loi binomiale de paramètres n et p ?.....	254
4.Comment calculer la probabilité d'obtenir au moins un "succès" ?.....	255
5.Comment calculer $p(X \geq k)$ ?.....	255

6.Comment calculer l'espérance $E(X)$ d'une variable aléatoire $X$ qui suit une loi binomiale de paramètres $n$ et $p$ ?.....	256
7.Comment calculer la variance $V(X)$ et l'écart-type $\sigma$ d'une variable aléatoire $X$ qui suit une loi binomiale de paramètres $n$ et $p$ ?.....	257
B) LOIS CONTINUES.....	257
8.Comment montrer qu'une fonction $f$ , définie sur un intervalle $[a;b]$ , est une densité de probabilité ?.....	257
1 - LOI EXPONENTIELLE.....	259
9.Comment calculer la probabilité qu'une variable aléatoire $X$ , suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda$ , soit comprise entre $\alpha$ et $\beta \in \mathbb{R}$ (soit $p(\alpha \leq X \leq \beta)$ ) ? .....	258
10.Comment calculer $p(X \leq t)$ ? $p(X \geq t)$ ?.....	258
11.Comment calculer la probabilité qu'un appareil qui n'est pas tombé en panne au bout de $x$ années ne tombe pas en panne durant les $h$ années suivantes ?.....	259
12.Comment calculer l'espérance $E(X)$ d'une variable aléatoire $X$ qui suit une loi exponentielle ?.....	260
2 - LOI UNIFORME.....	260
13.Comment calculer $p(c \leq X \leq d)$ lorsqu'une variable aléatoire $X$ suit une loi uniforme sur $[a;b]$ ?.....	260
14.Comment calculer $p(X < c)$ ? $p(X > c)$ ?.....	261
15.Comment calculer $E(X)$ ?.....	261
COMMENT CALCULER EFFICACEMENT ?.....	263



" Les chercheurs se sont rendus compte que l'intelligence humaine dépend essentiellement des connaissances. L'intelligence crée des connaissances, les utilise, en génère de nouvelles... "

Patrick Brézillon

# Chapitre 1 - GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

## 1. Comment déterminer l'ensemble de définition d'une fonction ?

### Méthode 1

Si l'expression de la fonction contient des quotients, on écrit qu'elle est définie si, et seulement si, le ou les dénominateurs sont différents de 0. La résolution du ou des équations ainsi obtenues conduit à  $D_f$ .

### Exemple

Déterminer l'ensemble de définition  $D_f$  de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{3x}{7-5x} + \frac{4}{x-6}.$$

### Solution

Soit  $x \in \mathbb{R}$ .  $f(x)$  est définie si, et seulement si,  $7-5x \neq 0$  et  $x-6 \neq 0$  ; soit  $x \neq \frac{7}{5}$  et  $x \neq 6$ .

$$\text{On a donc } D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{7}{5}; 6 \right\}.$$

Remarque : l'ensemble de définition est aussi appelé domaine de définition.

### Méthode 2

Si l'expression de la fonction contient des racines carrées, on écrit qu'elle est définie si, et seulement si, la ou les expressions sous les racines sont positives ou nulles. La résolution du ou des inéquations ainsi obtenues donne  $D_f$ .

### Exemple

Déterminer l'ensemble de définition  $D_g$  de la fonction

$$g : x \mapsto \sqrt{8-3x} + \sqrt{4+5x}.$$

### Solution

Soit  $x \in \mathbb{R}$ .  $g(x)$  est définie si, et seulement si,  $8-3x \geq 0$  et  $4+5x \geq 0$  ;

$$\text{soit } x \leq \frac{8}{3} \text{ et } x \geq -\frac{4}{5}. \text{ On a donc } D_g = \left[ -\frac{4}{5}; \frac{8}{3} \right].$$

**Méthode 3**

Si l'expression de la fonction contient des  $\ln$  (logarithmes), on écrit qu'elle est définie si, et seulement si, les quantités auxquelles s'applique  $\ln$  sont strictement positives. La résolution du ou des inéquations ainsi obtenues donne  $D_f$ .

**Exemple 1**

Quel est l'ensemble de définition  $D_h$  de la fonction  $h: x \mapsto \ln(1-x)$  ?

**Solution**

La fonction  $h$  est définie si, et seulement si,  $1-x > 0$  ; soit  $x < 1$ .  
Ainsi,  $D_h = ]-\infty; 1[$ .

**Exemple 2**

Étudier le domaine de définition  $D_f$  de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{\ln(x+2)}{\sqrt{9x-1}}$ .

**Solution**

$f$  est définie si, et seulement si,  $x+2 > 0$ ,  $9x-1 \geq 0$  et  $9x-1 \neq 0$  ; c'est-à-dire,  $x > -2$ ,  $x \geq \frac{1}{9}$  et  $x \neq \frac{1}{9}$ .

On conclut que  $D_f = \left] \frac{1}{9}; +\infty \right[$ .

**2. Comment montrer qu'une fonction  $f$  est paire ?**

**Méthode**

- On écrit que pour tout  $x \in D_f$ ,  $-x \in D_f$ .
- On montre que  $f(-x) = f(x)$  en calculant  $f(-x)$ .
- On conclut alors que  $f$  est paire.

**Exemple**

Soit  $f(x) = 3 - \frac{1}{x^2}$  définie sur  $\mathbb{R}^*$ . Montrer que  $f$  est paire.

**Solution**

Pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ , on a  $(-x) \in \mathbb{R}^*$ .

D'autre part,  $f(-x) = 3 - \frac{1}{(-x)^2} = 3 - \frac{1}{x^2} = f(x)$ .

La fonction  $f$  est donc paire.

### 3. Comment montrer qu'une fonction $f$ est impaire ?

#### Méthode

- On écrit que tout  $x \in D_f$ ,  $-x \in D_f$  (c'est vrai pour la quasi-totalité des exercices proposés).
- On montre que  $f(-x) = -f(x)$  en calculant  $f(-x)$ .
- On conclut alors que  $f$  est impaire.

#### Exemple

Montrer que la fonction  $g$  définie par  $g(x) = 2x^3 - xe^{x^2}$  est impaire sur  $\mathbb{R}$ .

#### Solution

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $(-x) \in \mathbb{R}$ .

D'autre part,

$$g(-x) = 2(-x)^3 - (-x)e^{(-x)^2} = -2x^3 + xe^{x^2} = -(2x^3 - xe^{x^2}) = -g(x).$$

La fonction  $g$  est donc impaire.

### 4. Comment étudier la parité d'une fonction $f$ ?

#### Méthode

- On vérifie que pour tout  $x \in D_f$ ,  $-x \in D_f$ .
- On calcule  $f(-x)$ .
- Si  $f(-x) = f(x)$ , on conclut que  $f$  est paire.
- Si  $f(-x) = -f(x)$ , on conclut que  $f$  est impaire.
- Si  $f(-x)$  est différente des deux résultats précédents, alors  $f$  n'est ni paire ni impaire.

#### Exemple

Soit  $h(x) = \ln\left(\frac{x+5}{5-x}\right)$ . Étudier la parité de  $h$  sur  $I = ]-5;5[$ .

#### Solution

Pour tout  $x \in I$ ,  $(-x) \in I$  (car  $-5 < x < 5 \Leftrightarrow -5 < (-x) < 5$ ).

Calculons  $f(-x)$  :

$$f(-x) = \ln \frac{-x+5}{5-(-x)} = \ln \frac{5-x}{x+5} = \ln \left( \frac{1}{\frac{x+5}{5-x}} \right) = -\ln \frac{x+5}{5-x} = -f(x).$$

On peut conclure que  $f$  est impaire.

### 5. Comment montrer qu'une fonction $f$ est périodique de période $p$ ?

#### Méthode

- On écrit que pour tout  $x \in D_f$ , on a  $(x+p) \in D_f$ .
- On montre que  $f(x+p) = f(x)$  en calculant  $f(x+p)$ .
- On conclut que la fonction  $f$  est périodique de période  $p$ .

#### Exemple

Soit  $f(x) = -5 \cos^2(x) + 1 + \sin x$  définie sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $f$  est périodique de période  $2\pi$ .

#### Solution

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $(x+2\pi) \in \mathbb{R}$ .

D'autre part :

$$\begin{aligned} f(x+2\pi) &= -5 \cos^2(x+2\pi) + 1 + \sin(x+2\pi) \\ &= -5 \cos^2(x) + 1 + \sin x, \quad (\text{car } \sin(x+2\pi) = \sin x \text{ et } \cos(x+2\pi) = \cos x) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

La fonction  $f$  est donc périodique de période  $2\pi$ .

### 6. Comment interpréter graphiquement la parité d'une fonction $f$ ?

#### Méthode 1

Si la fonction  $f$  est paire, alors l'axe des ordonnées est un axe de symétrie de la courbe représentative de  $f$ . On peut donc restreindre l'étude de  $f$  à la partie positive (ou négative) de son domaine de définition.

Ainsi, si  $f$  est paire sur  $\mathbb{R}$ , on étudie  $f$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .  $C_f$ , la courbe complète de  $f$ , s'obtient par la symétrie d'axe  $(Oy)$ .

**Méthode 2**

Si la fonction  $f$  est impaire, alors l'origine du repère  $O$  est centre de symétrie de la courbe représentative de  $f$ .

On peut donc restreindre l'étude de  $f$  à la partie positive (ou négative) de son domaine de définition.

**7. Comment interpréter graphiquement la périodicité d'une fonction  $f$  ?**
**Méthode**

Si la fonction  $f$  est périodique de période  $p$ , les portions de  $C_f$  sont les mêmes sur des intervalles successifs de longueurs  $p$ .

Ou encore, la courbe de  $f$  est invariante par la translation de vecteur  $p\vec{i}$ .

On peut donc restreindre l'étude de la fonction  $f$  à un intervalle de longueur  $p$ .

**Exemple**

Soit  $f(x) = -5 \cos^2\left(\frac{x}{5}\right) - 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- Étudier la parité de la fonction  $f$ .
- Montrer que  $f$  est  $10\pi$ -périodique.
- En déduire qu'il suffit d'étudier  $f$  sur l'intervalle  $[0; 5\pi]$ .

**Solution**

a) Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $-x \in \mathbb{R}$  et :

$$f(-x) = -5 \cos^2\left(\frac{-x}{5}\right) - 1 = -5 \left(\cos\left(\frac{-x}{5}\right)\right)^2 - 1 = -5 \left(\cos\left(\frac{x}{5}\right)\right)^2 - 1.$$

D'où  $f(-x) = f(x)$  sur  $\mathbb{R}$ .

La fonction  $f$  est donc paire.

b) Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $(x + 10\pi) \in \mathbb{R}$  et :

$$\begin{aligned} f(x + 10\pi) &= -5 \cos^2\left(\frac{x + 10\pi}{5}\right) - 1 = -5 \left(\cos\left(\frac{x + 10\pi}{5}\right)\right)^2 - 1 \\ &= -5 \left(\cos\left(\frac{x}{5} + 2\pi\right)\right)^2 - 1 = -5 \left(\cos\left(\frac{x}{5}\right)\right)^2 - 1 = f(x). \end{aligned}$$

La fonction  $f$  est donc  $10\pi$ -périodique.

c) La parité de la fonction  $f$  permet de restreindre son étude à l'intervalle  $[0; +\infty[$  alors que sa  $10\pi$ -périodicité autorise à ne l'étudier que sur un

intervalle de longueur  $10\pi$  ; choisissons  $[-5\pi; 5\pi]$  .

La prise en compte simultanée de la parité et la périodicité conduit finalement à étudier  $f$  sur l'intervalle  $[0; 5\pi]$  .

**8. Comment montrer qu'un point  $A(a;b)$  est centre de symétrie de la courbe représentative d'une fonction  $f$  ?**

**Méthode 1**

- On considère un réel  $h$  tel que  $(a+h) \in D_f$  et  $(a-h) \in D_f$ .
- On montre que  $\frac{f(a+h)+f(a-h)}{2} = b$  en calculant  $\frac{f(a+h)+f(a-h)}{2}$ .
- On conclut.

**Exemple**

Soit  $f(x) = -x^3 + x^2$  définie sur  $\mathbb{R}$ . Démontrer que le point  $A(1;2)$  est centre de symétrie de  $C_f$ , la courbe représentative de  $f$ .

**Solution**

Soit  $h \in \mathbb{R}$  tel que  $(1+h)$  et  $(1-h)$  appartiennent à  $D_f$ .

Calculons  $\frac{f(1+h)+f(1-h)}{2}$  :

$$\frac{f(1+h)+f(1-h)}{2} = \frac{-(1+h)^3 + (1+h)^2 - (1-h)^3 + (1-h)^2}{2}$$

Après développement, on trouve  $\frac{f(1+h)+f(1-h)}{2} = 2$  qui est l'ordonnée de  $A$ .

On peut donc conclure que  $A(1;2)$  est centre de symétrie de  $C_f$ .

**Méthode 2 (plus rapide)**

- On considère un réel  $x$  tel que  $(2a-x) \in D_f$
- On montre que  $\frac{f(x)+f(2a-x)}{2} = b$  (on a posé  $(a+h)=x$  dans la méthode 1).
- On conclut.

**Exemple**

Soit  $f(x) = -x^3 + x^2$  définie sur  $\mathbb{R}$ . Démontrer que le point  $A(1;2)$  est centre de symétrie de  $C_f$ .

**Solution**

Soit  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $(2+x) \in \mathbb{R}$ .

Calculons  $\frac{f(x) + f(2a-x)}{2}$  :

$$\frac{f(x) + f(2a-x)}{2} = -x^3 + 3x^2 - (2-x)^3 + 3(2-x)^2.$$

Après développement, on trouve  $\frac{f(x) + f(2a-x)}{2} = 2$  qui est l'ordonnée de A.

On conclut donc que  $A(1;2)$  est centre de symétrie de  $C_f$ .

**9. Comment montrer qu'une droite d'équation  $x=a$  est axe de symétrie de la courbe représentative d'une fonction  $f$  ?**

**Méthode 1**

- On prend  $h \in \mathbb{R}$  tel que  $(a+h)$  et  $(a-h) \in D_f$ .
- On montre que  $f(a+h) = f(a-h)$  en calculant séparément  $f(a+h)$  et  $f(a-h)$ .
- On conclut.

**Exemple**

Soit  $g(x) = \frac{3x^2 - 12x + 1}{x^2 - 4x}$  définie sur  $\mathbb{R} - \{0;4\}$ . Montrer que la droite d'équation  $x=2$  est axe de symétrie de  $C_g$ .

**Solution**

Soit  $h \geq 0$  tel que  $(2+h)$  et  $(2-h)$  appartiennent à  $D_f$  (ici,  $a=2$ ).

Montrons que  $g(2+h) = g(2-h)$ .

$$g(2+h) = \frac{3(2+h)^2 - 12(2+h) + 1}{(2+h)^2 - 4(2+h)} = \frac{3h^2 - 11}{h^2 - 4};$$

$$g(2-h) = \frac{3(2-h)^2 - 12(2-h) + 1}{(2-h)^2 - 4(2-h)} = \frac{3h^2 - 11}{h^2 - 4}.$$

On constate que  $g(2+h) = g(2-h)$ .

La droite d'équation  $x=2$  est donc axe de symétrie de  $C_g$ .



**Méthode 2**

On montre que  $f(2a-x)=f(x)$  (on a posé  $a+h=x$  dans l'équation précédente).

**Exemple**

Soit  $g(x)=\frac{3x^2-12x+1}{x^2-4x}$  définie sur  $\mathbb{R}-\{0;4\}$ .

Montrer que la droite d'équation  $x=2$  est axe de symétrie de  $C_g$ .

**Solution**

Soit  $x \in D_f$  tel que  $(4+x)$  appartient à  $D_f$ .

Montrons que  $g(2a-x)=g(x)$  avec  $a=2$ .

On a  $g(2a-x)=g(4-x)$

$$= \frac{3(4-x)^2-12(4-x)+1}{(4-x)^2-4(4-x)} = \dots = \frac{3x^2-12x+1}{x^2-4x} = g(x).$$

On peut conclure que la droite d'équation  $x=2$  est axe de symétrie de  $C_g$ .

**10. Comment interpréter l'égalité  $f(x)+f(-x)=c$  ?**

**Méthode**

Il suffit de voir que  $f(x)+f(-x)=c$  s'écrit aussi

$$\frac{f(0+x)+f(0-x)}{2} = \frac{c}{2}. \text{ Ce qui signifie que le point}$$

$A\left(0; \frac{c}{2}\right)$  est centre de symétrie de  $C_f$ .

**11. Comment déterminer les coordonnées du ou des points d'intersection de  $C_f$  et  $C_g$  ?**

**Méthode**

- On résout l'équation  $f(x)=g(x)$  pour trouver la ou les abscisses  $x_0$  des points d'intersection.

- On calcule  $f(x_0)$  pour trouver la ou les ordonnées.

- On conclut que les points de coordonnées  $(x_0; f(x_0))$  sont les points cherchés.

**12. Comment déterminer les coordonnées du ou des points d'intersection de  $C_f$  et de l'axe des abscisses ?**

**Méthode**

- Le ou les points d'intersection ont pour ordonnée 0.
- On résout l'équation  $f(x)=0$  pour trouver la ou les abscisses  $x_0$  (solution de l'équation) des points d'intersection.
- Les points de coordonnées  $(x_0 ; 0)$  sont les points cherchés.

**Exemple**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = -6x^2 + x + 5$ .  
Déterminer le ou les points d'intersection de  $C_f$ , la courbe représentative de  $f$ , et de l'axe des abscisses.

**Solution**

Résolvons l'équation  $f(x) = 0$  pour déterminer les abscisses des points d'intersection :

On a  $f(x) = 0 \Leftrightarrow -6x^2 + x + 5 = 0$ .

Après calcul du discriminant de cette équation du second degré, on obtient

les deux solutions  $x_1 = 1$  et  $x_2 = -\frac{5}{6}$ .

Les points cherchés ont donc pour coordonnées  $(1 ; 0)$  et  $\left(-\frac{5}{6} ; 0\right)$ .

**13. Comment déterminer les coordonnées du point d'intersection de  $C_f$  et de l'axe des ordonnées ?**

**Méthode**

- Le point d'intersection a pour abscisse 0 et pour ordonnée  $f(0)$ .
- On calcule  $f(0)$ .
- Le point cherché a pour coordonnées  $(0 ; f(0))$ .

**Exemple**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = -6x^2 + x + 5$ .  
Déterminer le point d'intersection de  $C_f$ , la courbe représentative de  $f$ , et de l'axe des ordonnées.

**Solution**

Le point cherché a pour abscisse 0 et pour ordonnée  $f(0)$ .

Comme  $f(0) = 5$ , on en déduit que le point d'intersection de  $C_f$  et de l'axe des ordonnées est le point de coordonnées  $(0 ; 5)$ .